УДК 621.923

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА, ПРОДОЛЬНО ОСЛАБЛЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Р.К. Калбиев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку
E-mail: elektroset@box.az

Исследовано кручение призматического бруса двухсвязного поперечного сечения, ограниченного снаружи квадратом или изнутри контуром, близким к окружностям. При кручении призматического бруса, продольно ослабленного цилиндрическими полостями по окружности, внутри наружного контура сечения призмы (квадрата) и при кручении кольцевого бруса при равном диаметре, касательные напряжений одинаковы. В таком случае геометрические параметры внутреннего контура более существенно влияют на напряженное состояние бруса, чем наружные.

В ранее опубликованных работах [1] дается изложение Сен-Венана, а затем изучаются брусья из разнородного материала, столь важные для железобетонных сооружений, по совершенно новым методам, впервые развитым Н.И. Мусхелишвили. В работах Д.И. Шермана [2] был указан прием, допускающий эффективное рассмотрение задач кручения призматических тел, поперечные сечения которых являются двухсвязными областями некоторого вида. Этот прием основан на введении по усмотрению на какой-либо одной из кривых, ограничивающих сечение, вспомогательной функции, для определения которой строится затем интегральное уравнение Фредгольма. Последнее решается последовательными приближениями, базирующимися на разложении вспомогательной функции в ряд по степеням параметра, характеризующего частично геометрические размеры сечения и главным образом сравнительную близость одной из его границ к другой. В [3] на основе методов теории функции комплексного переменного и конформного отображения рассмотрены и решены задачи теории упругости для неодносвязных областей изотропных и анизотропных материалов. Впервые на основе энергетического метода А.А. Гриффитс решил задачу о необходимой величине предельной разрушающей нагрузки для бесконечной однорядной пластины с прямолинейной микроскопической трещиной заданной длины в случае, когда пластина растягивается.

Обзор работ по задачи теории упругости для конечных тел показывает, что ранее границу тела принимали идеальной. Как известно, в отличие от идеальной, реальная поверхность тел (деталей) никогда не бывает абсолютно гладкой и всегда имеет микро- или макроскопическое неровности, образующие шероховатость. Под шероховатостью поверхности в машиностроении понимается совокупность неровностей, рассматриваемых в пределах стандартного участка. Качество обработки поверхности деталей машиностроения существенно влияет на их прочность. Так, например, повышение чистоты обработки при прочих равных условиях увеличивает статическую прочность, особенно хрупкую, и в большей степени предел выносливости. Эти факты объясняются влиянием микрогеометрии обработанной поверхности на напряженное поле. Таким образом, неровности, образующиеся при обработке рабочей поверхности, являются эффективными концентраторами напряжений и могут в несколько раз снижать прочность.

Именно в обход трудностей, связанных с решением задач указанными методами, мы предлагаем более эффективное, на наш взгляд, решение. Оно может оказаться полезным и удобным во многих частных вопросах теории упругости.

В работе рассмотрено кручение призматического бруса, продольно ослабленного цилиндрическими полостями с учетом шероховатости поверхности.

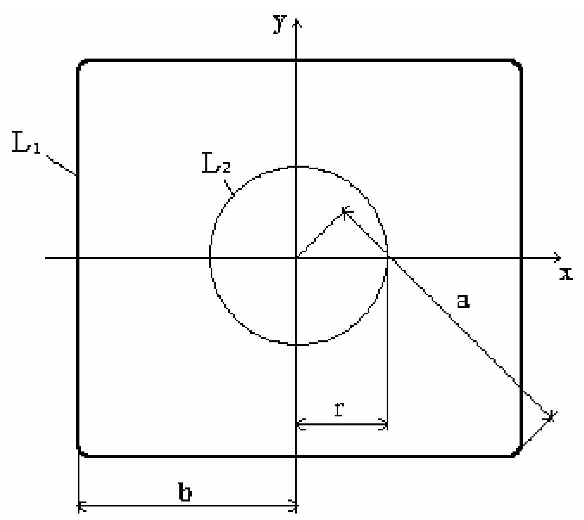


Рис. 1. *Сечение бруса*

Предположим, что изотропный и однородный призматический брус с поперечным сечением S в виде двусвязной области ограничен извне правильным четырехугольником L_1, а изнутри окружностями L_2 радиусом r (рис. 1). При решении прикладных задач целесообразно разработать эффективный приближенный метод решения задач теории упругости для двусвязных областей, который позволил бы избежать построение новых отображающих функций. Брус подвержен действию крутящего момента M.

Границу внутреннего контура (или наружного, если она близка к круговой) представим в виде:

$$\rho(\theta) = r + \varepsilon H(\theta).$$

Здесь e – малый параметр, равный отношению высоты наибольшего выступа профиля к радиусу отверстия или отношению глубины наибольшей впадины профиля к радиусу отверстия; $H(q)$ – функция, не зависящая от малого параметра.

Касательные напряжения ищем в виде разложений по малому параметру e:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(0)} + \varepsilon \tau_{r\theta}^{(1)} + \ldots \qquad (1)$$

где для упрощения задачи пренебрегаем членами, содержащими малый параметр e в степени выше первой.

В соотношениях (1) $\tau_{rq}^{(0)}$ – напряжения нулевого приближения, а $\tau_{rq}^{(1)}$ – напряжения первого приближения. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений равновесия. Граничные условия на внешнем на квадратном контуре будут [1] в нулевом приближении такие же, как в исходной задаче:

$$f_1^{(0)}(t) = f_1(t)$$

и в первом приближении будут нулевыми

$$f_1^{(1)}(t) = 0.$$

Значения компонент напряжений ($\tau_{rq}^{(0)}$, $\tau_{rq}^{(1)}$) при $r=r(q)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r=R$.

$$\tau_{\theta r}^{(0)}\Big|_{r=\rho} = \tau_{\theta r}^{(0)}\Big|_{r=R} + \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=R} \varepsilon H(\theta) + \ldots +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \qquad (2)$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}\Big|_{r=\rho} = \tau_{\theta r}^{(1)}\Big|_{r=R} + \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=R} \varepsilon H(\theta) + \ldots +$$

Граничные условия на контуре L_2 представим в виде

$$\tau_{nt} = \tau_{r\theta}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0. \qquad (3)$$

Если взять $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ с точностью до величин первого порядка малости и подставить выражения (2) в граничные условие (3), то после преобразования краевые условия при $r=R$ получим в следующем виде:

$$\tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \qquad \tau_{r\theta}^{(1)} + H(\theta)\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} = 0.$$

Решение в нулевом приближении является известным. Первое и все последующие приближения решаются тем же способом, что и нулевое, только задача усложняется из-за граничных условий на круговом контуре $r=R$.

Рассмотрим решение поставленной задачи в нулевом приближении.

Как известно [1], изучение задачи кручения бруса сводится к нахождению функций $\varphi(z)$ комплексного переменного, удовлетворяющих определенным граничным условиям на L_j:

$$\phi(t)+\overline{\phi(t)} = t\cdot\bar{t}+C_j,\ t\in L_j\quad (j=1,2). \qquad (4)$$

Здесь t – аффикс точек контура L_j; C_j – вещественные постоянные (одну из которых, например C_1, примем равной нулю, а C_2 подлежит определению).

Внешность квадрата L_1, как известно, отображается на внешность единичного круга с помощью следующей функции [1]

$$z = A\tau\left(1+\frac{m}{\tau^q}\right), \qquad (5)$$

где $A=\dfrac{a+b}{2}$; $|m|=\dfrac{a-b}{a+b}$, a и b соответственно радиусы окружностей, описанных вокруг квадрата и вписанных в квадрат L_1; q – число осей симметрии (число сторон), q=4; $\tau=e^{i\theta}$, τ – аффикс, а θ – аргумент точки контура единичной окружности.

Очевидно, что в (5) при m=0 контур L_1 превращается в окружность радиуса $R=A$. Для квадрата $m=-1/9$.

Регулярную функцию в области S построим в виде суммы функций, одна из которых регулярна внутри контура L_1, а другая вне контура L_2, т. е.

$$\phi^{(j)}(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k\left(\frac{z}{A}\right)^k+\sum_{k=1}^{N} b_k\left(\frac{r}{z}\right)^k. \qquad (6)$$

Здесь неизвестные и подлежащие определению коэффициенты $a_к$ и $b_к$ ($\kappa=\overline{0,\infty}$), принимаются комплексными величинами. N – верхний предел суммы выбирается в зависимости от точности, с которой желательно получить искомое решение. Формально, лишь с целью несколько облегчить математические выкладки, верхний предел возьмем равным бесконечности; в последующем, для иллюстрации решения, фактически будем рассматривать лишь укороченные системы.

Учитывая (6) в (5), граничные условия на L_j приводится к виду:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{t}{A}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{\bar{t}}{A}\right)^k+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{r}{\bar{t}}\right)^k = t\cdot\bar{t}-C_j \quad \text{на} \quad L_j. \qquad (7)$$

На внешнем контуре L_1 имеем

$$t\bar{t}=A^2\left(\tau+\frac{m}{\tau^3}\right)(\tau^{-1}+m\tau^3)=$$
$$=A^2(1+m^2)+A^2m(\tau^4+\tau^{-4}). \qquad (8)$$

Учитывая в граничном условии (4) отображающую функцию (5) и выражение (8), получим:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^{-\nu}S_1(\nu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^{\nu}S_1(\nu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^{-\nu}S_2(\nu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^{\nu}S_2(\nu)+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\tau^{-\nu}S_3(\nu)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\tau^{\nu}S_3(\nu)=A^2m\tau^4+A^2m\tau^{-4}+C. \quad (9)$$

Приравнивая в (9) коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$S_1(\nu)+S_2(\nu)+S_3(\nu)=A^2m\varepsilon. \qquad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$S_1(\nu)=\sum_{n=\nu-4E\left(\frac{\nu-1}{4}\right)}^{\nu} {}^*a_k\left(\frac{r}{A}\right)^k m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}},$$
$$S_2(\nu)=\sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} {}^*b_k m^{\frac{\nu_1-\nu}{4}} C_{\nu_1}^{\frac{\nu_1-\nu}{4}}, \qquad (11)$$
$$S_3(\nu)=\sum_{\nu_1=\frac{\nu+\varepsilon}{3}+\varepsilon}^{\infty} {}^*b_k m^{\frac{\nu_1+\nu}{4}} C_{\nu_1}^{\frac{\nu_1+\nu}{4}},$$

ε равно 0 или 1.

Кроме того, к системе бесконечных уравнений (10) следует присоединить еще уравнение для свободных членов (они отвечают нулевой степени переменной τ):

$$2S_3(0)=A^2(1+m^2)+C_1.$$

Теперь преобразуем граничное условие на внутреннем контуре L_2. Так как на окружности L_2 имеем $t\bar{t}=R^2$, то равенству (7) придадим следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{t}{r}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{t}{r}\right)^k+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{r}{t}\right)^k=0 \quad \text{на} \quad L_2.$$

В граничном условии (7), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r/t, получим следующую систему бесконечных линейных алгебраических уравнений

$$a_\nu+\lambda^\nu b_\nu=0,\quad \nu=1,2,\ldots \qquad (12)$$

Таким образом, решение задачи кручения призматических брусьев с центральной круглой полостью сведено к двум (10) и (12) системам бесконечных линейных алгебраических уравнений.

Из этих уравнений удерживается несколько первых уравнений и определяются неизвестные коэффициенты $a_к$ и $b_к$. Число этих уравнений должно быть фиксировано в зависимости от параметра, характеризующего близость контуров сечения, от требуемой точности расчета.

После нахождения корней уравнений (10) и (12) по формуле (6) определяется регулярная в области S функция $\varphi(z)$.

Как известно, компоненты касательных напряжений вычисляются по формуле [1]

$$\tau_{yx}-i\tau_{yz}=\mu\tau i[\phi'(z)-\bar{z}]. \qquad (13)$$

Подставляя в (13) значение регулярной функции $j(z)$, определяемой по формуле (6), получим

$$\tau_{yx}-i\tau_{yz}=\mu\tau i[-\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\frac{r^k}{z^{k+1}}+\sum_{\nu=1}^{\infty}ka_k A^{-k}z^{k-1}b_k-\bar{z}].$$

В (7) перейдя к полярным координатам r и q, где $z=re^{iq}$, $\bar{z}=re^{iq}$, получим

$$\tau_{yx}-i\tau_{yz}=\mu\tau i\begin{bmatrix}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\dfrac{r^k}{\rho^{k+1}}e^{-i(k+1)\theta}+\\+\sum_{k=1}^{\infty}kA^{-k}\rho^{k-1}e^{i(k-1)\theta}b_k-\rho e^{-i\theta}\end{bmatrix}.$$

Как известно [1],

$$\tau_\rho-i\tau_\theta=\frac{\overline{\xi\omega'(\xi)}}{e|\omega'(\xi)|}(\tau_{xz}-\tau_{yz}).$$

На границе области должно быть $\tau_\rho=0$, поэтому предыдущая формула позволяет непосредственно определить контурное значение касательного напряжения τ_θ и, в частности, найти его максимум.

Уравнению для определения жесткости при кручении можно придать вид

$$D=\mu\iint_S(x^2+y^2+x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x})dxdy=$$

$$=\mu\{J-\frac{i}{4}\int_{L_j}(\phi(t)-\overline{\phi(t)})d(t\,\bar{t})\}, \quad (14)$$

где интегрирование ведется по всем контурам L_j, обход которых таков, что область S всегда остается слева; J – полярный момент инерции площади поперечного сечения:

$$J=\int_{L_1}(x^2+y^2)dxdy. \quad (15)$$

Согласно равенствам (14) и (15), формуле для определения жесткости на кручение придадим еще и такой вид:

$$D=\mu(J+D_0), \quad (16)$$

где μ – модуль сдвига.

$$D_0=-J-\frac{i}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{L_j}(\phi(t)-\overline{\phi(t)})d(t\,\bar{t}), \quad (17)$$

J может быть записан в виде

$$J=\iint_{S_1}(x^2+y^2)dxdy-J_0=\frac{1}{3}\int_{L_1}(x^3dy-y^3dx)-J_0.$$

Здесь $J_0=\dfrac{\pi r^2}{2}$ – полярный момент инерции круга (область – внутренние контуры L_2).

Двойной интеграл, распространенный по S_2 (вся область, охваченная контуром L_1), после замены криволинейным и перехода в нем к переменным t и $\bar{t}$, приводится к виду

$$J=\frac{1}{8i}\int_{L_1}t\bar{t}(\bar{t}dt-td\bar{t})-J_0.$$

Преобразовав, в свою очередь, этот интеграл к переменной τ, учитывая в нем отображающую функцию (5), получим:

$$J=\frac{\pi A^4}{2}(1-4m^2-3m^2)-\frac{\pi r^4}{2}.$$

Этому равенству можно придать и такой вид:

$$J=J_0\left\{\left(\frac{A}{r}\right)^4(1-4m^2-3m^4)-1\right\}. \quad (18)$$

Так как интеграл в равенстве (17), распространенный по окружности L_1, тождественно обращается в нуль (на окружности $t\bar{t}=r^2$ и поэтому его дифференциал равен нулю), то, учитывая отображающую функцию (5), а также выражения для регулярной функции $\varphi(z)$, можно записать D_0 в форме

$$D_0=\frac{i}{4}\begin{bmatrix}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{-\nu}S_1(\nu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{\nu}S_2(\nu)+\\+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{-\nu}S_3(\nu)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{\nu}S_1(\nu)-\\-\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{-\nu}S_2(\nu)-\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\gamma\tau^{\nu}S_3(\nu)\end{bmatrix}\times$$

$$\times A^2(4m\tau^3-4m\tau^{-5})d\tau. \quad (19)$$

Здесь γ – единичная окружность в плоскости ξ, на которую отображается L_1. При этом $S_1(\nu)$, $S_2(\nu)$ и $S_3(\nu)$ определяются по формулам (11).

Из всех интегралов, входящих в равенство (19) отличны от нуля лишь интегралы, содержащие переменную τ в первой отрицательной степени. Поэтому для вычисления D_0 получим следующую простую формулу:

$$D_0=4\pi mA^2[S_1(4)-S_2(4)+S_3(4)]. \quad (20)$$

Таким образом, жесткость на кручение будет определяться по формуле, учитывая (18) и (20) в равенстве (16):

$$D=\mu(J+D_0)=4\mu\pi mA^2[S_1(4)-S_2(4)+S_3(4)]+$$

$$+\mu J_0\left\{\left(\frac{A}{r}\right)^4(1-4m^2-3m^4)-1\right\}.$$

При заданной закручивающей паре, т. е. при заданной величине M, постоянная τ определится по формуле

$$\tau=\frac{M}{D}$$

и задача решена на нулевом приближении [3].

Перейдем к решению задачи в первом приближении. На первом приближении главный момент внешних напряжений, приложенных к верхнему основанию, определится формулой [4]

$$M^{(1)}=-H(\theta)\frac{\partial\tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}.$$

Для каждого профиля обработанной поверхности (реализация шероховатой поверхности) внутреннего контура пластинки функцию $H(\theta)$ можно разложить в степенной ряд на отрезке $[0;2\pi]$.

До сих пор исследование распределения напряжений возле границ призматического бруса с неровностями на контуре проводилось в детермини-

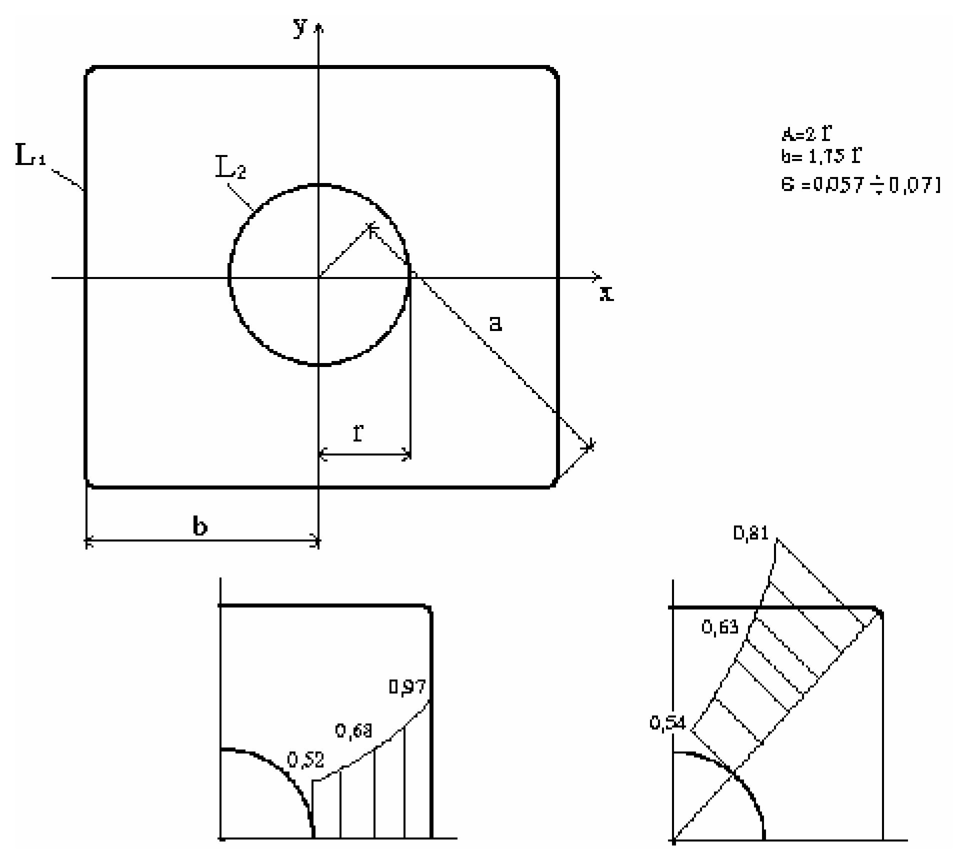


Рис. 2. *Эпюры касательных напряжений*

стической постановке. Представляет большое практическое значение случай, когда распределение и формы неровностей (шероховатости) контура носят случайный характер.

Для расчетов были приняты следующие законы распределения шероховатостей [5]:

$$H(\theta) = d\cos\frac{2\pi\theta}{h},$$

где d – высота выступов, а h – шаг.

Нами были рассмотрены следующие конкретные примеры.

При определенных параметрах характерных точках конструкции определены величины касательных напряжений и для наглядности построены эпюры напряжений (рис. 2).

При кручении призматического бруса, продольно ослабленного цилиндрическими полостями по окружности внутри наружного контура сечении призмы (квадрата) и при кручении кольцевого бруса по контуру наружного контура, при равным диаметре, касательные напряжений одинаковы. В таком случае, геометрические параметры внутреннего контура более существенно влияют на напряженное состояние бруса, чем наружного.

При численных примерах для прокатных валов (рис. 3), при R_1=0,35 м, r=0,22 м, μ=8,4·10^4, D=μ·J, $\tau = \dfrac{M}{D}$, l=r/R_1 определены компоненты касательных напряжений [5] с учетом шероховатости (рис. 4).

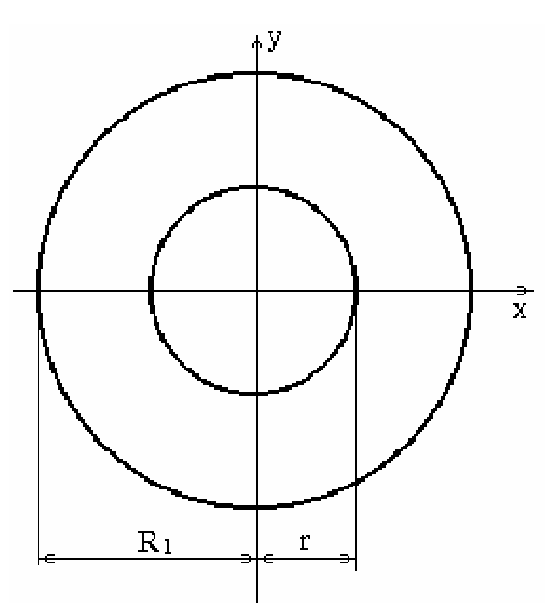


Рис. 3. *Сечение вала*

Известно, что при эксплуатации наружный диаметр R_1 уменьшается и получает минимальное допускаемое значение. При вычислении получено R_1=0,28 м. Здесь $\Delta\tau_{max}$ – относительный процент касательных напряжений (рис. 4).

$$\Delta\tau_{\max} = \frac{\tau_{r\theta} - \tau'_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} \cdot 100\%,$$

где $\tau_{r\theta}$ и $\tau'_{r\theta}$ – касательные напряжения с учетом и без учета шероховатости.

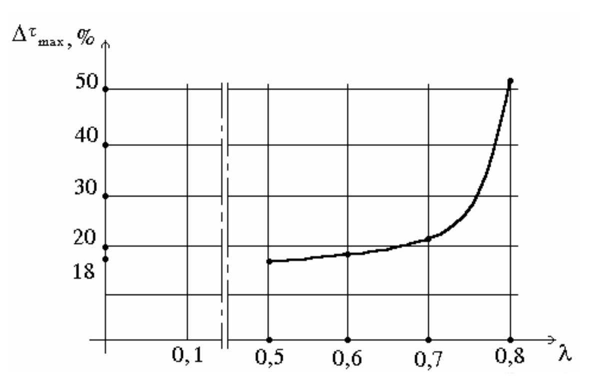


Рис. 4. *График зависимости касательных напряжений от геометрических параметров при кручении*

Как видно из рис. 4, после некоторых значений λ влияние шероховатости на напряженное состояние вала резко увеличивается.

Выводы

При кручении призматического бруса, продольно ослабленного цилиндрическими полостями по окружности внутри наружного контура сечении призмы (квадрата) и при кручении кольцевого бруса при равным диаметре, касательные напряжений одинаковы. В таком случае, геометрические параметры внутреннего контура более существенно влияет на напряженное состояние бруса, чем наружные.

Для оценки прочности бруса найдено касательное напряжение, действующее вблизи шероховатого контура. После некоторых значений $\lambda=r/R_1$ влияние шероховатости на напряженное состояние вала резко увеличивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
2. Кулиев С.А. Двумерные задачи теории упругости. – М.: Стройиздат, 1991. – 350 с.
3. Калбиев Р.К. Кручение кольцевых пластин с шероховатостью // Сборник научных трудов по механике. – Баку: АзИСУ, 1998. – Ч. 1. – № 8. – С. 24–27.
4. Калбиев Р.К. Исследование напряженного состояния в шестиугольной пластинке, ослабленной центральными круглым отверстием с шероховатостью // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 1. – С. 142–146.
5. Калбиев Р.К. Определение напряженного состояния кольцевого бруса с шероховатостью при кручении // Труды XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Саратов: СГТУ, 2005. – С. 111–113.

УДК 519.71:622.3